Marius PERIANU Florian DUMITREL

Matematică

clasa a IX-a

partea a II-a

filiera teoretică: profil real (matematică-informatică, științe ale naturii)
filiera tehnologică: toate profilurile (tehnic, servicii, resurse naturale)
filiera vocațională: profil militar (matematică-informatică)

art Klett

CUPRINS

CAPITOLUL 1

FUNCȚII. LECTURI GRAFICE

Tema 1.1

Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice

Se numește *funcție* un triplet de forma (A, B, f), unde A și B sunt două mulțimi, iar f un procedeu prin care oricărui element $x \in A$ i se asociază un singur element $y \in B$, notat $y = f(x)$; se spune că f este o funcție definită pe A cu valori în B și se notează $f : A \to B$.

Mulțimea A se numește *domeniul de definiție* al funcției, iar mulțimea B se numește *domeniul valorilor* funcției sau *codomeniul* funcției.

Dacă $x \in A$, atunci elementul $y = f(x) \in B$ se numește *imaginea lui x prin f* sau *valoarea lui f în x*.

Vom spune că două funcții $f : A \to B$ și $g : C \to D$ sunt *egale* (notăm $f = g$) dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$.

Fie $f : A \to B$ o funcție și $D \subset A$ o submulțime a lui A. Funcția $g : D \to B$ definită prin $g(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in D$, se numește *restricția funcției* f *la mulțimea* D și se notează $g = f|_D$.

Fie $f : A \to B$ o funcție. Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numește *graficul* lui f.

Observații. 1. $G_f \subset A \times B$.

2. $(a, b) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = b$.

Fie $f : A \to B$ o *funcție numerică* (adică $A, B \subset \mathbb{R}$) și xOy un reper cartezian în plan. Mulțimea punctelor $M(x, y)$ din plan cu $x \in A$ și $y = f(x)$ se numește *reprezentarea geometrică a graficului funcției f* (sau, pe scurt, *reprezentarea grafică a funcției f*). Dacă A este un interval sau o reuniune de intervale, reprezentarea geometrică a graficului lui f este o curbă numită *curba reprezentativă a funcției f*.

Curba reprezentativă a unei funcții numerice $f : A \to \mathbb{R}$ intersectează axa Ox în punctele $P(\alpha, 0)$, unde α este soluție a ecuației $f(x) = 0,\ x \in A$ (dacă ecuația are soluții). Dacă $0 \in A$, curba reprezentativă a funcției f intersectează axa Oy în punctul $Q(0, f(0))$.

*

1. Determinați mulțimile $D \subset \mathbb{R}$ astfel încât corespondența $x \to 3x - 2$ să definească o funcție definită pe D cu valori în $\{1, 7, 13\}$.

2. Determinați mulțimile $D \subset \mathbb{R}$ astfel încât corespondența $x \to x^2 + 1$ să definească o funcție definită pe D cu valori în $\{1, 2, 3\}$.

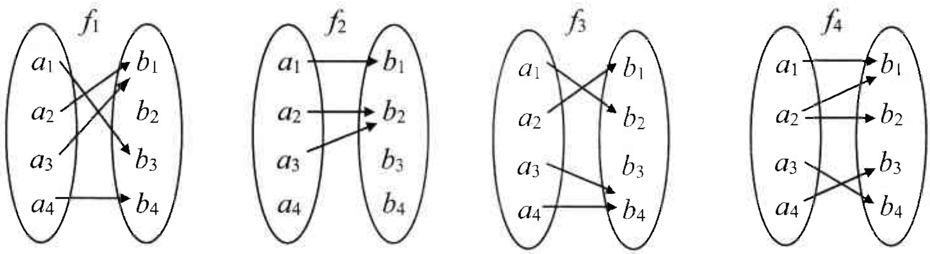
3. Determinați mulțimile $E \subset \mathbb{R}$ astfel încât corespondența $x \to 2x - 1$ să definească o funcție $f : \{-1, 0, 1\} \to E$.

4. Fie mulțimea $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Determinați submulțimile A ale lui $2\mathbb{Z}$ astfel încât corespondența $x \to \frac{x}{3}$ să definească o funcție $f : A \to \mathbb{Z}$.

5. Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3\}$ și $B=\{-1,0,1\}$. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât corespondența $x\to ax+b$ să definească o funcție $f:A\to B$.

6. Corespondența $\frac{m}{n}\to m+n$ definește o funcție de la $\mathbb{Q}_+$ la $\mathbb{N}$?

7. Precizați care dintre următoarele diagrame definesc o funcție $f:A\to B$:



8. Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ cu proprietatea $f(1)+f(2)=3$.

9. Găsiți toate funcțiile $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ cu proprietatea $f(x)\geq x$ pentru orice $x\in\{1,2,3\}$.

10. Determinați domeniul maxim de definiție pentru fiecare dintre funcțiile:

a) $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$, $D\subset\mathbb{R}$; *b)* $f:D\to\mathbb{Q}$, $f(k)=\frac{2k-1}{1+(-1)^k}$, $D\subset\mathbb{Z}$;

c) $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\{x\}}$, $D\subset\mathbb{R}$; *d)* $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{[x]-\sqrt{x}}$, $D\subset\mathbb{R}$.

11. Pentru fiecare număr natural m, notăm cu $u(m)$ ultima sa cifră. Considerăm funcția

$$f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N},\ f(n)=u(2^n).$$

a) Calculați $f(13)$, $f(39)$ și $f(2000)$.

b) Explicitați legea de corespondență a funcției f.

12. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-2, & x<1\\ x^2-4x+3, & x\geq 1\end{cases}$. Calculați:

a) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$; *b)* $f(1)$; *c)* $f\left(2-\sqrt{3}\right)$; *d)* $f\left(2+\sqrt{3}\right)$.

13. O funcție $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are proprietatea $f(x,y)=x+f(x-1,x-y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Calculați $f(5,2)$ știind că $f(1,0)=3$.

14. *a)* Câte restricții are o funcție $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$?

b) Câte dintre acestea conțin pe 1 în domeniul de definiție?

15. Determinați restricțiile funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, la mulțimile:

a) $\mathbb{Z}$; *b)* $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; *c)* $A=\left\{\sqrt{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

16. Arătați că funcțiile $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left[\frac{2x+1}{3}\right]$, și $g:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$, sunt egale.

17. Fie funcțiile $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(k)=k+(-1)^k$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=[x]+\cos\pi x$. Arătați că $g|_{\mathbb{Z}}=f$.

18. Determinați graficul fiecărei funcții

a) $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$; *b)* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

19. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax+1, & x\le 2\\ x+b, & x>2\end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$. Determinați a,b știind că $(1,2)\in G_f$ și $(3,5)\in G_f$.

20. Fie mulțimile $A=\{0,1,2,3\}$ și $B=\{a,b,c\}$. Precizați care dintre următoarele submulțimi ale produsului cartezian $A\times B$ reprezintă graficul unei funcții $f:A\to B$:

a) $G_1=\{(0,a),(1,b),(2,c),(3,c)\}$; *b)* $G_2=\{(0,a),(1,b),(2,c)\}$;

c) $G_3=\{(0,a),(1,b),(2,c),(3,a),(3,b)\}$; *d)* $G_4=\{(0,a),(1,a),(2,b),(3,b)\}$.

21. Determinați intersecțiile graficelor următoarelor funcții numerice cu axele de coordonate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$; *b)* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$;

c) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$; *d)* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 2\\ 2x-5, & x>2\end{cases}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\le 1\\ x-2, & x>1\end{cases}$; *f)* $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1, & -1\le x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, & 0<x\le 1\end{cases}$.

**

22. Arătați că funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}[x], & \{x\}<\dfrac{1}{2}\\ [x]+1, & \{x\}\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$ (funcția „*cel mai apropiat întreg de x*“), și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$, sunt egale.

23. Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-a|+|x-b|$. Determinați mulțimile $D\subset\mathbb{R}$ astfel încât $f|_D$ să fie funcție constantă.

24. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 3\\ 2x+3, & x>3\end{cases}$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 2\\ 2x+3, & x>2\end{cases}$.

Determinați cea mai mare mulțime $D\subset\mathbb{R}$ astfel încât $f|_D=g|_D$.

25. Arătați că mulțimea $G=\{(x+1,2x+1)\mid x\in\mathbb{R}\}$ este graficul unei funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

26. Determinați punctele de pe graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<1\\ x-3, & x\geq 1\end{cases}$, care au suma dintre abscisă și ordonată egală cu 1.

27. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 2\\ 2x-1, & x>2\end{cases}$. Determinați numerele reale a,b astfel încât $a-b=1$ și $f(a)+f(b)=1$.

28. Se consideră mulțimea $A=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid x^2-y=9\}$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Determinați $A\cap G_f$.

29. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $2f(x)+3f(1-x)=2x+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

30. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x+1)\leq x\leq f(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

* * *

31. O funcție $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ are proprietatea: pentru orice $a,b\in\mathbb{N}^*$ cu $a+b=2^n$, $n\in\mathbb{N}$, rezultă că $f(a)+f(b)=n^2$. Calculați $f(2012)$.

32. O funcție $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ are proprietatea $f(m)+f(n)=f(mn)$, $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$. Dacă, în plus, $f(2)=3$ și $f(3)=5$, calculați $f(2592)$.

33. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=mx+n$, unde $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Arătați că $f=g$ dacă și numai dacă $a=0$, $b=m$ și $c=n$.

34. Arătați că nu există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, și $g(x)=|x|$ să fie egale.

35. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+cx+d$, unde a,b,c,d sunt numere raționale. Arătați că, dacă există $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $f(x_0)=g(x_0)$, atunci $f=g$.

36. Arătați că două funcții $f,g:A\to B$ sunt egale dacă și numai dacă $G_f=G_g$.

37. Arătați că pentru o funcție $f:A\to B$ avem $G_f=A\times B$ dacă și numai dacă mulțimea A are un singur element.

38. Fie A o mulțime cu a elemente și B o mulțime cu b elemente. Arătați că numărul funcțiilor $f:A\to B$ este egal cu b^a.

39. Fie A o mulțime cu n elemente și B o mulțime cu două elemente. Câte perechi de funcții (f,g) au proprietatea $G_f\cup G_g=A\times B$?

Tema 1.2

Imaginea unei funcții. Preimagine. Funcții mărginite

Fie $f : A \to B$ o funcție și $X \subset A$. Mulțimea

$$f(X) := \{y \in B \mid \exists x \in X, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in X\}$$

se numește *imaginea mulțimii* X *prin funcția* f. Mulțimea $f(A)$ se numește *imaginea funcției* f sau *mulțimea valorilor* funcției f și se notează cu $\operatorname{Im} f$.

Observație. Dacă $f : A \to B$ este o funcție numerică, atunci imaginea mulțimii $X \subset A$ prin f se obține proiectând graficul funcției $f|_X$ pe axa Oy.

Fie $f : A \to B$ o funcție și $Y \subset B$. Mulțimea

$$f^{-1}(Y) := \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$

se numește *preimaginea mulțimii* Y *prin funcția* f.

Vom spune că o funcție $f : A \to \mathbb{R}$ este *mărginită* dacă mulțimea $f(A)$ este mărginită, adică există două numere reale $\alpha < \beta$ astfel încât $\alpha \le f(x) \le \beta$ pentru orice $x \in A$.

Observație. O funcție $f : A \to \mathbb{R}$ este mărginită dacă și numai dacă există un număr real $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \le M$ pentru orice $x \in A$.

---

*

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $f([a,b]) = [-1,1]$.

2. Găsiți o prelungire la $\mathbb{R}$ a funcției $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

3. Găsiți o prelungire la $\mathbb{R}$ a funcției $f : \mathbb{Q} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

4. Găsiți o restricție a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 2 \\ 3x-7, & x \ge 2 \end{cases}$, care să aibă imaginea $\{0,1\}$.

5. Dați un exemplu de funcție $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ astfel încât $\operatorname{Im} f = \{0,1\}$.

6. Fie funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = 1 + (-1)^k$. Determinați $\operatorname{Im} f$ și $f^{-1}(\{0\})$.

7. Lecturând graficele următoarelor funcții, determinați imaginile și preimaginile mulțimilor indicate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sgn} x$; $f([-1,0])$ și $f^{-1}(\{-1,0,1\})$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, & x\in(-\infty,1] \\ (x-1)^2, & x\in(1,\infty) \end{cases}$; $f((1,\infty))$ și $f^{-1}([1,4])$.

8. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Determinați mulțimile:

a) $f((0,1))$; *b)* $f((-\infty,2])$; *c)* $f^{-1}([0,\infty))$; *d)* $f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

9. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$. Determinați mulțimile:

a) $f([-1,0))$; *b)* $f\left(\left(-\frac{1}{2},1\right]\right)$; *c)* $f^{-1}([-1,1])$; *d)* $f^{-1}((0,\infty))$.

10. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$. Determinați mulțimile:

a) $f([-1,1])$; *b)* $f((-\infty,-1))$; *c)* $f^{-1}([0,1])$; *d)* $f^{-1}((1,\infty))$.

11. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=[x]$. Determinați mulțimile:

a) $f([-1,3))$; *b)* $f((1,\infty))$; *c)* $f^{-1}(\mathbb{N})$; *d)* $f^{-1}((-1,1])$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}$. Determinați mulțimile:

a) $f(\mathbb{Z})$; *b)* $f\left(\left(1,\frac{3}{2}\right)\right)$; *c)* $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$; *d)* $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)$.

**

13. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$. Determinați mulțimile:

a) $f([-1,1))$; *b)* $f((1,\infty))$; *c)* $f^{-1}((1,2))$; *d)* $f^{-1}(\{2\})$.

14. Fie funcția $f:(2,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$. Determinați mulțimile:

a) $f((2,5])$; *b)* $f((2,3))$; *c)* $f^{-1}([0,\infty))$; *d)* $f^{-1}([3,7])$.

15. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<2 \\ 2x-3, & x\geq 2 \end{cases}$.

a) $f((-3,3))$; *b)* $f((0,\infty))$; *c)* $f^{-1}([-1,3))$; *d)* $f^{-1}((0,5])$.

16. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} -1, & x<1 \\ 2x-1, & x\geq 1 \end{cases}$.

a) $f([-2,2])$; *b)* $f((-\infty,1])$; *c)* $f^{-1}([-1,5))$; *d)* $f^{-1}(\{-1,0,1\})$.

17. Determinați imaginea funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+2$; *b)* $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x-5}{x-3}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-3, & x<1 \\ 2x+3, & x\geq 1 \end{cases}$; *d)* $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x-\left[\frac{3x-1}{5}\right]$.

18. Arătați că următoarele funcții sunt mărginite:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-1)^{[x]}$; *b)* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$; *d)* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=\dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}$;

19. Arătați că următoarele funcții sunt mărginite:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}\cdot\operatorname{sgn}x$; *b)* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{|x|+1}$; *d)* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\{x\}}$.

20. Arătați că următoarele funcții sunt nemărginite:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$; *b)* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Z}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$; *d)* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sin x$.

21. Fie funcția $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x,y)=2x-3y+1$. Determinați $f(\mathbb{Z}\times\{0\})$ și $f^{-1}(\{1\})$.

22. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+a}{x-3}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați numerele reale a astfel încât $f((3,5])=[7,\infty)$.

23. Studiați mărginirea funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; *b)* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1}$.

24. Arătați că o funcție $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este mărginită dacă și numai dacă există un număr real $M>0$ astfel încât $|f(x)|\le M$ pentru orice $x\in D$.

25. Fie $f,g:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții mărginite. Arătați că funcțiile

$$s:D\to\mathbb{R},\ s(x)=f(x)+g(x) \text{ și } p:D\to\mathbb{R},\ p(x)=f(x)\cdot g(x)$$

sunt mărginite.

26. Determinați numerele reale a astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+a|x|+1}{|x|+1}$ să fie mărginită.

27. Arătați că, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$, este mărginită.

28. Determinați imaginea funcției $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(k,h)=3k+5h$.

29. Determinați imaginea funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x^2+1,\ 2y+1)$;

b) $g:(0,1)\times(0,1)\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

30. Fie $f : A \to B$ o funcție. Arătați că următoarele afirmații sunt adevărate:

a) $f(\varnothing) = \varnothing$;

b) dacă $X, X' \subset A$, $X \subset X'$, atunci $f(X) \subset f(X')$;

c) $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$ pentru orice $X, X' \subset A$;

d) $f(X \cap X') \subset f(X) \cap f(X')$ pentru orice $X, X' \subset A$.

31. Fie $f : A \to B$ o funcție și $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$. Arătați că au loc afirmațiile:

a) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$;

b) dacă $Y, Y' \subset B$, $Y \subset Y'$, atunci $f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Y')$;

c) $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$ pentru orice $Y, Y' \subset B$;

d) $f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$ pentru orice $Y, Y' \subset B$.

32. Fie funcțiile $f : A \to C$ și $g : B \to D$. Considerăm funcția

$$h : A \times B \to C \times D,\ h(x, y) = (f(x), g(y)).$$

Demonstrați egalitățile:

a) $h(A \times B) = f(A) \times g(B)$;

b) $h^{-1}(C \times D) = f^{-1}(C) \times g^{-1}(D)$.

33. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 3}$, este mărginită.

34. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$, este nemărginită.